Reptes

Problemes

Óscar Rivero
Universitat de Warwick

Arriba un nou número de la *SCM/Notícies* amb quatre problemes per resoldre, com és habitual. Voldria començar amb un agraïment per al Juanjo Rué, que va portar aquesta secció durant els darrers anys i que de ben segur continuarà col·laborant amb les seves idees.

En aquesta ocasió, els nostres geòmetres de referència, Miquel Amengual i Joaquim Nadal, ens proposen dos nous problemes, i tenim també una nova desigualtat del José Luis Díaz, en aquest cas una mica diferent de les habituals. Finalment, l'Oriol Baeza, estudiant del Grau de Matemàtiques a la UPC, ens envia un interessant problema de teoria de jocs.

Pel que fa a les solucions dels problemes, n'hem rebut de Miquel Amengual, Ernest Garriga, Pere Martínez, Joaquim Nadal i Bruno Salgueiro. Els agraïm a tots la seva dedicació, el temps dedicat i les seves boniques solucions. En publiquem una selecció.

Us animem a tots a enviar les vostres propostes, tant de problemes com de solucions. S'han d'enviar preferiblement en TEX o LaTEX, i així mateix cal adjuntar els dibuixos corresponents en un format que sigui editable. Agrairem que sigui així per poder garantir una ràpida i eficaç edició dels fitxers; gràcies! Les solucions i propostes de problemes envieu-les a

`riverosalgado@gmail.com`.

Problemes proposats

A173. (Proposat per Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex amb $AB = AD$, $\angle CAD = 3 \cdot \angle BAC$ i $\angle BCA = \angle BDC$. Provau que $\angle BCA = 30°$.

A174. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Determineu totes les funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que, per a qualssevol nombres reals x, y, satisfan

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3.$$

A175. (Proposat per Oriol Baeza Guasch, estudiant del Grau de Matemàtiques, UPC.)

L'Arnau i la Berta tenen una bossa amb 2.021 pedres. Per torns, i començant per l'Arnau, en treuen unes quantes seguint dues condicions: (a) no poden treure més de 5 pedres per torn i (b) no en poden treure el mateix nombre que n'ha tret l'anterior jugador. Guanya qui treu l'última pedra. Determineu qui té una estratègia guanyadora.

A176. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de Llagostera, Girona.)

Sigui $ABCD$ un paral·lelogram d'àrea S i siguin K, L, M i N els punts mitjans de AB, BC, CD i DA, respectivament. Siguin $E = AL \cap DK$, $F = AL \cap BM$, $G = CN \cap BM$ i $H = CN \cap DK$. De la mateixa manera, siguin $P = CK \cap DL$, $Q = AM \cap DL$, $R = AM \cap BN$ i $T = BN \cap CK$.

(a) Proveu que $EFGH$ és un paral·lelogram i trobeu-ne l'àrea.

(b) Trobeu l'àrea de l'octògon obtingut quan fem que s'intersequin els paral·lelograms $EFGH$ i $PQRT$.

Solucions

A169. (Proposat per Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui ABC un triangle acutangle, designem per a D el peu de la perpendicular tirada des de A fins a BC.

Sigui P un punt del segment AD tal que $\angle ABP = \angle PCB = 30°$ i $\angle PAC = 2 \cdot (\angle PAB)$.

Determinau el valor de $\angle BAP$.

Solució: (Solució d'Ernest Garriga, Centre Sant Pau de Mataró.)

Farem per trobar una equació en $\tan\varphi$. Notem que $\alpha = 90° - \beta = 90° - (\varphi + 30°) = 60° - \varphi$. Llavors,
$\overline{PD} = \overline{AD}\tan 2\varphi \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}\overline{AD}$
i de la mateixa manera
$\overline{PD} = \overline{AD}\tan\varphi\tan(60° - \varphi)$
$= \tan\varphi\frac{\sqrt{3}-\tan\varphi}{1+\sqrt{3}\tan\varphi}\overline{AD}$.

Igualant i simplificant, ens queda

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{1}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\sqrt{3}-\tan\varphi}{1+\sqrt{3}\tan\varphi},$$

que és l'equació cúbica

$$\tan^3\varphi - \sqrt{3}\tan^2\varphi - 3\tan\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.$$

Posant

$$\frac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1 - 3\tan^2\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

obtenim

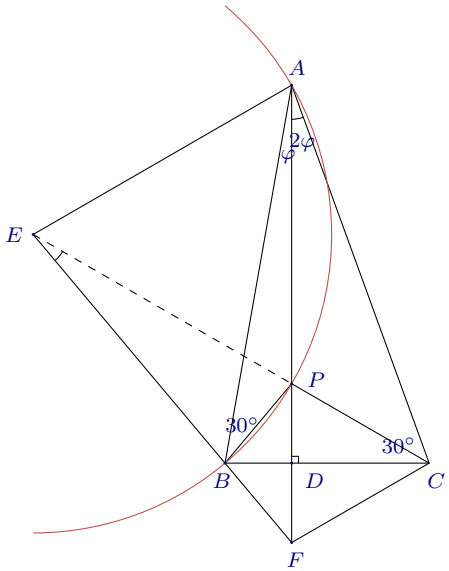
$$\tan 3\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

d'on veiem que $3\varphi = 30°$ i $\varphi = 10°$.

Aquesta solució és molt semblant a la rebuda per Joaquim Nadal. Hem volgut incloure també la solució del proponent, de caràcter més sintètic.

Posem $\angle BAP = \varphi$. Llavors $\angle PAC = 2\varphi$.

Designarem E el circumcentre del triangle ABP i F el punt simètric de P respecte de BC. Atès que $EA = EP$ i $\angle AEP = 2\cdot\angle ABP = 2\times 30° = 60°$, el triangle AEP és equilàter.



En conseqüència, $\angle EPA = 60° = \angle CPD$ i, per tant, els punts E, P, C estan alineats. I atès que

$$\angle EAF = \angle EAP = 60° = \angle DFC = \angle AFC,$$

serà

$$AE \parallel FC. \qquad (1)$$

A més, els triangles APC i EPF són iguals (costat-angle-costat) amb

$$AC = EF. \qquad (2)$$

De (1) i (2) segueix que el quadrilàter $AEFC$ és un trapezi isòsceles amb $\angle CEF = \angle CAF = 2\varphi$.

Al seu torn,

$$\angle CEB = \angle PEB = 2\cdot\angle PAB = 2\varphi.$$

Així, doncs, $\angle CEF = \angle CEB$. I com que B, F pertanyen al mateix semipla dels determinats per la recta CE, els punts E, B, F estan alineats. Per tant, tenim

$$\angle EBP + \angle PBD + \angle DBF = 180°.$$

Com que $\angle EBP = \frac{1}{2}(180° - 2\varphi) = 90° - \varphi$ i $\angle DBF = \angle PBD = 90° - (30° + \varphi) = 60° - \varphi$, resulta: $(90° - \varphi) + 2(60° - \varphi) = 180°$.

És a dir: $\varphi = 10°$.

A170. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin a, b, c tres nombres reals positius amb $0 < a \le b \le c$. Proveu que la desigualtat següent és certa:

$$\frac{a^5 - b^5}{a^3b^3} + \frac{b^5 - c^5}{b^3c^3} + \frac{c^5 - a^5}{c^3a^3} \ge 0.$$

Solució: (Solució del proponent.)

Com ens indica Joaquim Nadal, a l'enunciat cal indicar que $0 < a \leq b \leq c$. Suposant això, ens proposa una solució elemental i interessant, però computacionalment llarga per reproduir-la íntegrament, que es basa en la manipulació algebraica de les expressions per arribar al resultat. S'inclou doncs la solució del proponent, que simplifica els càlculs provant un resultat analític previ.

Per provar la desigualtat farem servir el resultat següent. Si $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció convexa, llavors per a $0 < a \leq b \leq c$ se satisfà que

$$(c-b)f(a) + (b-a)f(c) + (a-c)f(b) \geq 0.$$

De fet, pel teorema de Lagrange, sabem que existeixen nombres $c_1 \in (a, b)$ i $c_2 \in (b, c)$ de manera que $f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i $f'(c_2) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$. Com que f és convexa i $f'' > 0$, f' és creixent. Per tant,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

i d'aquí se'n dedueix el resultat.

Apliquem-ho ara per a $f(x) = x^{-3/2}$, que és convexa. Com que $0 < a^2 \leq b^2 \leq c^2$, es té que l'expressió

$$(c^2-b^2)f(a^2) + (b^2-a^2)f(c^2) + (a^2-c^2)f(b^2)$$

és no negativa, o el que és el mateix

$$\frac{c^2-b^2}{a^3} + \frac{b^2-a^2}{c^3} + \frac{a^2-c^2}{b^3} \geq 0.$$

Reagrupant termes, veiem que

$$\frac{a^5-b^5}{a^3b^3} + \frac{b^5-c^5}{b^3c^3} + \frac{c^5-a^5}{c^3a^3} \geq 0.$$

Tenim la igualtat si, i només si, $a = b = c$.

A171. (Proposat per la redacció.)

Sigui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció bijectiva. Demostreu que existeixen tres nombres $a < b < c$ que compleixen que $f(a)+f(c) = 2f(b)$.

Solució: (Solució de Pere Martínez, de l'Hospitalet de Llobregat.)

Sigui f una funció bijectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$. Aleshores, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ que satisfà $f(0) < f(n)$. Per tant, podem considerar el nombre b, definit com el mínim del conjunt

$$E = \{n \in \mathbb{N} \text{ amb } f(0) < f(n)\}.$$

Aleshores, $0 < b$ i $f(0) < f(b)$.

Sigui ara $n = 2f(b) - f(0)$. Com que f és bijectiva, existeix un enter c amb $f(c) = n$. Clarament, se satisfà que $f(c)+f(0) = 2f(b)$. A més, $f(c) = f(b) + (f(b) - f(0)) > f(b) > f(0)$, i per tant $c \in E$. Per definició de b, sabem que $b < c$. D'aquesta manera, quan posem $a = 0$ es té que $a < b < c$ i $f(a) + f(c) = 2f(b)$, com es volia veure.

A172. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera, Girona.)

En una circumferència de radi 1 inscrivim un hexàgon ABCDEF amb tres costats alterns (per exemple, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$) de longitud 1 i els altres tres de longituds arbitràries. Demostreu que els punts mitjans dels costats arbitraris determinen un triangle equilàter.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

La proposició següent ens resultarà útil.

Proposició. Siguin x, y, z nombres reals tals que $x + y + z = \pi$. Es compleix:

$$\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - \cos^2\frac{z}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \tag{3}$$

Indicació de la prova

Atès que $z = \pi - (x + y)$, serà

$$\sin z = \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$

i, per tant, $\sin^2 z$ s'expressa com

$$\begin{aligned}
&(\sin x\cos y + \cos x\sin y)^2 \\
&= \sin^2 x\cos^2 y + \cos^2 x\sin^2 y \\
&+2\sin x\cos x\sin y\cos y \\
&= \sin^2 x + \sin^2 y \\
&+2\sin x\sin y\,(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \\
&= \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x\sin y\cos(x+y) \\
&= \sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x\sin y\cos z.
\end{aligned}$$

És a dir:

$$\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z = 2\sin x\sin y\cos z.$$

Si substituïm aquí x, y, z per $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}$, respectivament, s'obté (1).

Indiquem per a O el centre de la circumferència donada a l'enunciat, i per L, M, N, els respectius punts mitjans dels costats BC, DE, FA de l'hexàgon que circumscriu.

Suposem $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=1$. Llavors els triangles OAB, OCD, OEF són equilàters i, si posam $\angle BOC=x$, $\angle DOE=y$, $\angle FOA=z$, es té

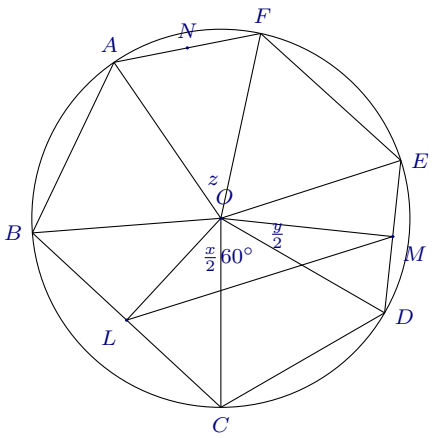
$$x+y+z=360^\circ-3\times 60^\circ=180^\circ, \qquad (4)$$

de manera que *aquests* x, y, z són com els de la proposició.

Siguin L i M els punts mitjans de BC i DE. Podem aplicar ara el teorema del cosinus a OLM, tenint en compte en primer lloc que $OB=OC=1$, $\angle BOC=x$, $OD=OE=1$ i $\angle DOE=y$. Per tant, $OL=\cos\frac{x}{2}$ i $OM=\cos\frac{y}{2}$. Per la seva banda, i emprant els resultats anteriors

$$\angle LOM=60^\circ+\frac{x+y}{2}=90^\circ+\left(60^\circ-\frac{z}{2}\right).$$

Aleshores, es té que LM^2 val



$$\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}+2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\left(60^\circ-\frac{z}{2}\right),$$

o el que és el mateix,

$$\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$$
$$+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

Si substituïm aquí $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}$ per la seva expressió deduïda de la proposició, aquesta igualtat afirma que LM^2 val

$$\cos^2\frac{z}{2}+\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

Substituint $\cos^2\frac{z}{2}$ per $1-\sin^2\frac{z}{2}$ a l'expressió anterior, aquesta ens permet escriure ara LM^2 com

$$1-\sin\frac{z}{2}\left(\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right)$$
$$+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

Fent servir altra vegada els resultats anteriors, obtenim $\frac{z}{2}=90^\circ-\frac{x+y}{2}$. Això implica $\sin\frac{z}{2}=\cos\frac{x+y}{2}$ i la igualtat anterior equival a afirmar que LM^2 és igual a

$$1-\sin\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right)$$
$$+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

Aquesta igualtat se simplifica si usem la fórmula trigonomètrica del cosinus de la suma de dos angles. Llavors ens queda que LM^2 s'expressa com

$$1+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2},$$

Com que les expressions de MN^2 i NL^2 es poden obtenir de l'expressió de LM^2 permutant x, y i z, i com que LM^2 és una funció simètrica de x, y i z, resulta $LM^2=MN^2=NL^2$ i $\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NL}$, com es volia.